

# Problemas da 15na - 5

18/05/2009



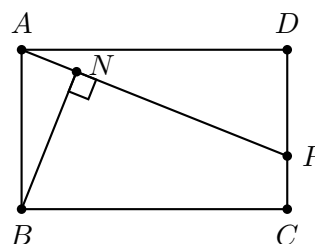
## Nível 1

### Soma dos algarismos

- (a) Existem dois números naturais consecutivos tais que a soma dos algarismos de cada um deles é divisível por 9?
- (b) Existem dois números naturais consecutivos tais que a soma dos algarismos de cada um deles é divisível por 19?

## Nível 2

**Retângulo 3x5** - Marcamos um ponto qualquer  $P$  sobre o lado  $CD$  do retângulo  $ABCD$  de lados  $AD = 5$  e  $CD = 3$ . Em seguida, a partir de  $B$ , traçamos uma perpendicular ao segmento  $AP$ , determinando o ponto  $N$ . Calcule o produto  $AP \times BN$ .



## Nível 3

### Sequência

- (a) Sejam  $a, b, c$  e  $d$  números racionais tais que  $a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2}$ . Prove que  $a = c$  e  $b = d$ .
- (b) As sequências de inteiros  $(a_n)_{n \geq 0}$  e  $(b_n)_{n \geq 0}$  são definidas por  $(1 + \sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$ . Por exemplo,  $a_2 = 3$  e  $b_2 = 2$ , pois  $(1 + \sqrt{2})^2 = 3 + 2\sqrt{2}$ .
- Prove que  $a_n^2 - 2b_n^2 = (-1)^n$ , para todo número natural  $n$ .
- Conclua que a equação  $x^2 - 2y^2 = 1$  possui infinitas soluções com  $x$  e  $y$  inteiros positivos.

- 
- Data limite para postagem das soluções: 25/05/2009.
  - Data de publicação da solução no site: 15/06/2009.