

Problemas da 15na - 11- Soluções

10/08/2009



Nível 1

Problemas fáceis e problemas difíceis - Ana, Bruna e Carla resolveram um total de 100 problemas do livro de matemática de modo que cada uma delas resolveu separadamente 60 problemas. Chamamos um problema de difícil se ele foi resolvido por somente uma das estudantes, e chamamos um problema de fácil se foi resolvido por todas. Prove que o número de problemas difíceis excede a quantidade de problemas fáceis em 20 unidades.

Solução da OBMEP: Sejam f , m e d as quantidades de problemas resolvidos por 3, 2 e 1 das estudantes, respectivamente. Como ao todo temos 100 problemas, então

$$f + m + d = 100.$$

As três estudantes resolveram ao todo 180 problemas. Então

$$3f + 2m + d = 180.$$

Subtraindo esta última equação do dobro da primeira, obtemos

$$-f + d = 200 - 180$$

ou

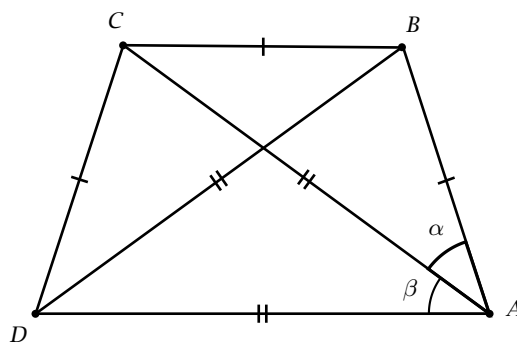
$$d = f + 20,$$

como queríamos provar.

Nível 2

Quadrilátero especial – Em um quadrilátero $ABCD$ os lados AB , BC e CD são iguais e $AC = BD = AD$. Determine a medida dos ângulos do quadrilátero.

Solução da OBMEP:



Sejam $\hat{BAC} = \alpha$ e $\hat{CAD} = \beta$. De $AD = BD$, concluímos que $\hat{ABD} = \alpha + \beta$. De $AB = BC$, obtemos $\hat{BCA} = \hat{BAC} = \alpha$. Os triângulos ABC e BCD são congruentes pelo caso LLL. Assim, $\hat{CBD} = \hat{BCA} = \alpha$ e $\hat{BCD} = 2\alpha + \beta$. Os triângulos ADB e CAD também são congruentes pelo caso LLL. Assim, $\hat{CAD} = \hat{ADB} = \beta$ e $\hat{ACD} = \alpha + \beta$. Olhando para os ângulos dos triângulos ABC e ABD , obtemos $4\alpha + \beta = 180^\circ$ e $2\alpha + 3\beta = 180^\circ$. Assim, $4\alpha + \beta = 2\alpha + 3\beta$, donde $\alpha = \beta$. Logo, $5\alpha = 180^\circ$, donde $\alpha = 36^\circ$. Portanto, $\hat{A} = \hat{D} = 72^\circ$ e $\hat{B} = \hat{C} = 108^\circ$.

Nível 3

Equação em inteiros – Ache todos os inteiros positivos n para os quais existem n inteiros positivos x_1, x_2, \dots, x_n satisfazendo

$$1 = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \dots + \frac{1}{x_n^2}.$$

Solução da OBMEP: Notemos primeiro que se n satisfaz a propriedade pedida então também satisfaz $n+3$. De fato, se x_1, x_2, \dots, x_n são números inteiros tais que

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \dots + \frac{1}{x_n^2} = 1$$

então os números $y_1 = 2x_1, y_2 = 2x_2, \dots, y_n = 2x_n, y_{n+1} = y_{n+2} = y_{n+3} = 4$ satisfazem a equação

$$\frac{1}{y_1^2} + \frac{1}{y_2^2} + \dots + \frac{1}{y_{n+3}^2} = 1.$$

Notemos agora que: para $n = 1$ basta tomar $x_1 = 1$; para $n = 6$, $x_1 = x_2 = x_3 = 2, x_4 = x_5 = 3, x_6 = 6$; para $n = 8$, $x_1 = x_2 = x_3 = 2, x_4 = x_5 = 3, x_6 = x_7 = 9, x_8 = 18$.

Falta então ver os casos $n = 2, n = 3$ e $n = 5$. Nesses casos podemos supor que $2 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ e então

$$1 = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \dots + \frac{1}{x_n^2} \leq \frac{n}{4}.$$

Resta assim ver o caso $n = 5$. Suponhamos primeiro que $x_4 = 2$, então $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 2$ e

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_3^2} + \frac{1}{x_4^2} + \frac{1}{x_5^2} = 1 + \frac{1}{x_5^2} > 1.$$

Então $3 \leq x_4 \leq x_5$ e

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_3^2} + \frac{1}{x_4^2} + \frac{1}{x_5^2} \leq \frac{3}{4} + \frac{2}{9} < 1.$$

Portanto, os possíveis valores para n são todos os inteiros positivos exceto 2, 3 e 5.